Τετάρτη 29/05/2019

$\varphi(16)=8$ $\qquad$ $\varphi(20)=8$

Είναι οι πολλαπλασιαστικές ομάδες $U(\mathbb{Z}_{16})$ και $U(\mathbb{Z}_{20})$ ισόμορφες;

$[1]_{16}, [3]_{16}$ | $[1]_{20}, [3]_{20}$
$[5]_{16}, [7]_{16}$ | $[7]_{20}, [9]_{20}$
$[9]_{16}, [11]_{16}$ | $[11]_{20}, [13]_{20}$
$[13]_{16}, [15]_{16}$ | $[17]_{20}, [19]_{20}$

✓ Έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων
✓ Είναι αβελιανές
Τάξεις στοιχείων να είναι ίδιες.

Για την $U(\mathbb{Z}_{16})$:

$o([1]_{16})=1$, $o([3]_{16})=4$
$o([5]_{16})=4$, $o([7]_{16})=2$
$o([9]_{16})=2$, $o([11]_{16})=4$
$o([13]_{16})=4$, $o([15]_{16})=2$

Στοιχεία τάξης 1: $[1]_{16}$
Στοιχεία τάξης 2: $[7]_{16}, [9]_{16}, [15]_{16}$
Στοιχεία τάξης 4: $[3]_{16}, [5]_{16}, [11]_{16}, [13]_{16}$

Για την $U(\mathbb{Z}_{20})$:

$o([1]_{20})=1$, $o([3]_{20})=4$
$o([7]_{20})=4$, $o([9]_{20})=2$
$o([11]_{20})=2$, $o([13]_{20})=4$
$o([17]_{20})=4$, $o([19]_{20})=2$

Στοιχεία τάξης 1: $[1]_{20}$
Στοιχεία τάξης 2: $[9]_{20}, [11]_{20}, [19]_{20}$
Στοιχεία τάξης 4: $[3]_{20}, [7]_{20}, [13]_{20}, [17]_{20}$

$[1]_{16} \longrightarrow [1]_{20}$
$[7]_{16} \longrightarrow [19]_{20}$
$[9]_{16} \longrightarrow [9]_{20}$
$[15]_{16} \longrightarrow [11]_{20}$ $(3\cdot 17)$
$[3]_{16} \longrightarrow [3]_{20}$
$[5]_{16} \longrightarrow [17]_{20}$
$[11]_{16} \longrightarrow [7]_{20}$
$[13]_{16} \longrightarrow [13]_{20}$

Ισομορφισμός

δεν έχει διαιρέτες του μηδενός

Δώστε ένα παράδειγμα μιας ακέραιας περιοχής και ενός ιδεώδους της έτσι ώστε ο δακτύλιος πηλίκο να έχει διαιρέτες του μηδενός.

σύμπλοκα

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0+2\mathbb{Z}, 1+2\mathbb{Z}\} = \langle 1+2\mathbb{Z} \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$$

$$\left(\begin{array}{l} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_m \\ \{a+m\mathbb{Z} \mid a\in\mathbb{Z}\} = \{0+m\mathbb{Z}, 1+m\mathbb{Z}, 2+m\mathbb{Z}, \dots, m-1+m\mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

διαιρέτες του μηδενός

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ $\quad (2+6\mathbb{Z})(3+6\mathbb{Z}) = 0+6\mathbb{Z}$

$\neq 0+6\mathbb{Z}$

- Αποδείξτε ότι κάθε ομάδα πηλίκο κυκλικής ομάδας είναι κυκλική

Έστω $G=\langle a \rangle$ κυκλική $H \triangleleft G$

Ισχυριζόμαστε: $G/H = \langle aH \rangle$.

$aH \in G/H \Rightarrow \langle aH \rangle \subseteq G/H \quad (1)$

Έστω $gH \in G/H \Rightarrow g\in G=\langle a \rangle \Rightarrow g=a^n \Rightarrow gH=a^nH = (aH)^n \in \langle aH \rangle \Rightarrow G/H \subseteq \langle aH \rangle \quad (2)$

| είναι αβελιανή οπότε δεν έχω θέμα είτε aH είτε Ha |

Από (1) και (2) έχουμε $G/H=\langle aH \rangle$ δηλ. G/H κυκλική.

δεν είναι κυκλικές γιατί δεν είναι αβελιανές

- Είναι οι ομάδες $A_4\times\mathbb{Z}_3$, $S_3\times S_3$ ισόμορφες;

✓ $|A_4\times\mathbb{Z}_3| = |A_4|\,|\mathbb{Z}_3| = 12\cdot 3 = 36 = 6\cdot 6 = |S_3|\times|S_3| = |S_3\times S_3|$

✓ $A_4\times\mathbb{Z}_3$ δεν είναι αβελιανή όπως και η $S_3\times S_3$

$A_4 = \{I, (1,2,3), (1,2)(3,4)\}$ (8) (3) $\times$ $\mathbb{Z}_3 = \{[0]_3, [1]_3, [2]_3\}$

$S_3 = \{I, (1,2), (1,2,3)\}$ — (1,3) (2,3) (3) ; (1,3,2) (2)

Στοιχεία τάξης 2: $((1,2)(3,4), [0]_3), ((1,4)(2,3), [0]_3), ((1,3)(2,4), [0]_3)$ για την $A_4\times\mathbb{Z}_3$.

Έστω $(a,b) \in S_3 \times S_3$ και $o(a,b) = 2 = \text{Ε.Κ.Π}(o(a), o(b))$

$$a, b \in \{ I, (1,2), (1,3), (2,3) \}$$

Στοιχεία τάξης 2 της $S_3 \times S_3$ (15)

$(a,b) \in \{ \cancel{(I,I)}, ((1,2), I), ((1,3), I), ((2,3), I), (I, (1,2)), ((1,2),(1,2)), ((1,3),(1,2)), ((2,3),(1,2)), (I,(1,3)), ((1,2),(1,3)), ((1,3),(1,3)), ((2,3),(1,3)), (I,(2,3)), ((1,2),(2,3)), ((1,3),(2,3)), ((2,3),(2,3)) \}$

Οι ομάδες $A_4 \times Z_3$ και $S_3 \times S_3$ δεν είναι ισόμορφες γιατί η $A_4 \times Z_3$ έχει 3 στοιχεία τάξης 2 ενώ η $S_3 \times S_3$ έχει 15 στοιχεία τάξης 2.

- Δείξτε ότι η $H = \langle ([1]_2, [2]_{12}) \rangle$ είναι κανονική υποομάδα της $Z_2 \times Z_{12}$ και βρείτε με ποια γνωστή σας αβελιανή ομάδα είναι ισόμορφη η $Z_2 \times Z_{12} / H$.

Η $Z_2 \times Z_{12}$ είναι αβελιανή αφού Z_2 και Z_{12} αβελιανές άρα κάθε υποομάδα της είναι κανονική συνεπώς και η Η είναι κανονική.

$H = \langle ([1]_2, [2]_{12}) \rangle = \{ ([0]_2, [0]_{12}), ([1]_2, [2]_{12}), ([0]_2, [4]_{12}), ([1]_2, [6]_{12}), ([0]_2, [8]_{12}), ([1]_2, [10]_{12}) \}$ $\quad |H| = 6.$

$$|Z_2 \times Z_{12} / H| = \frac{|Z_2 \times Z_{12}|}{|H|} = \frac{|Z_2| \times |Z_{12}|}{|H|} = \frac{2 \cdot 12}{6} = 4$$

$\to Z_4$

$\to$ Ομάδα Klein (όχι κυκλική)

(0,0)	(1,0)	(1,1)	(0,1)
(1,2)	(0,2)	(0,3)	(1,3)
(0,4)	(1,4)	(1,5)	(0,5)
(1,6)	(0,6)	(0,7)	(1,7)
(0,8)	(1,8)	(1,9)	(0,9)
(1,10)	(0,10)	(0,11)	(1,11)
(0,0)+H	(1,0)+H	(1,1)+H	(0,1)+H

$Z_2 \times Z_{12} / H$

$4((1,1)+H) = (0,4) \in H$

$o((0,0)+H) = 1 \qquad o((1,1)+H) = 4$

$o((1,0)+H) = 2 \qquad o((0,1)+H) = 4$

Κυκλική ομάδα η $Z_2 \times Z_{12}/H$ αφού το $(1,1)+H$ έχει τάξη ίση και η τάξη της ομάδας.

$$Z_2 \times Z_{12} / H \simeq Z_4$$

- Βρείτε όλους τους ομομορφισμούς ομάδων $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z}$ κυκλική $\quad \mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$

$\varphi(1) = m$
$\varphi(2) = \varphi(1+1) = \varphi(1) + \varphi(1) = 2m$
$\vdots$
$\varphi(k) = km$

Ελέγχουμε αν $\varphi(k) = km$, όπου $m \in \mathbb{Z}$ είναι ομομορφισμός ομάδων

$\varphi(k+\lambda) = (k+\lambda)m = km + \lambda m = \varphi(k) + \varphi(\lambda)$ Άρα φ ομομορφισμός ομάδων
Δηλαδή για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ η απεικόνιση $\varphi(a) = am$ είναι ομομορφισμός ομάδων.

Άρα έχουμε για κάθε $m \in \mathbb{Z}$ έναν ομομορφισμό ομάδων.

- Η $\varphi: G \to G$ με τύπο $\varphi(g) = g^2$ είναι ομομορφισμός ομάδων αν-ν G αβελιανή.

$(\to)$ $\varphi(g) = g \cdot g$ ομομορφισμός ομάδων

Έστω $a, b \in G \Rightarrow \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \to (ab)(ab) = aabb$
$\Rightarrow abab = aabb$
$\Rightarrow bab = abb$
$\Rightarrow ba = ab \to G$-αβελιανή

$(\leftarrow)$ G-αβελιανή
$\varphi(ab) = abab \xrightarrow[\text{αβελιανή}]{G} aabb = \varphi(a)\varphi(b) \Rightarrow \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \Rightarrow \varphi$ ομομορφισμός ομάδων

- Βρείτε όλους τους ομομορφισμούς δακτυλίων $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

Έστω $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ομομορφισμός δακτυλίων τότε $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ είναι σίγουρα ομομορφισμός ομάδων Άρα $\varphi(a) = ma$ για κάποιο m.
Τότε αφού φ ομομορφισμός δακτυλίων $\Rightarrow \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \Rightarrow mab = ma\,mb$
$\Rightarrow mab = m^2 ab$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ για $a = 1 = b \Rightarrow m = m^2 \Rightarrow m^2 - m = 0$
$m(m-1) = 0 \Rightarrow m = 0$ ή $m = 1$
(i) Αν $m = 0$ $\varphi(a) = 0 \cdot a = 0$ (ii) Αν $m = 1$ $\varphi(a) = 1 \cdot a = a$

(i) $\varphi(a+b)=0=0+0=\varphi(a)+\varphi(b)$
$\varphi(ab)=0=0\cdot 0=\varphi(a)\,\varphi(b)$

(ii) $\varphi(a+b)=a+b=\varphi(a)+\varphi(b)$
$\varphi(ab)=ab=\varphi(a)\cdot\varphi(b)$.

Άρα και οι δύο είναι ομομορφισμοί δακτυλίων.

■ Δείξτε ότι η ομάδα $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ δεν είναι κυκλική.

Έστω $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ κυκλική $\Rightarrow \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}=\langle(a,b)\rangle=\{n(a,b)\mid n\in\mathbb{Z}\}$.

$(1,0)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \Rightarrow (1,0)=n(a,b)=(na,nb)$ $\begin{cases}1=na\\0=nb\end{cases} \xrightarrow{n\neq 0} \begin{matrix}a\neq 0\\ b=0\end{matrix}$

$(0,1)=m(a,b)=(ma,mb)$ $\begin{cases}0=ma\\1=mb\end{cases} \longrightarrow 1=m\cdot 0=0$

Άτοπο

Άρα δεν είναι κυκλική.